C Anhang C

C.1 Komplexe Zahlen

C.1.1 Definition

Die Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl

$$\sqrt{-|a|} = \sqrt{-1}\,\sqrt{|a|} \equiv i\sqrt{|a|}$$

ist **keine** reelle Zahl. Man bezeichnet derartige Zahlen als *imaginär*, wobei abkürzend für $\sqrt{-1}$ der Operator mit dem Symbol i verwendet wird.

C.1.2 Darstellung mit Real- und Imaginärteil

In Erweiterung des reellen Zahlenraums definieren wir nun komplexe Zahlen, die eine Linearkombination aus einer reellen und einer imaginären Zahl darstellen:

$$z = x + i\,y\,, \quad z \in \mathcal{C}\,.$$

Dabei ist x der Realteil und y (**ohne** den Operator i) der Imaginärteilteil der komplexen Zahl z. Diese komplexe Zahl läßt sich geometrisch als ein Punkt in einer zweidimensionalen Zahlenebene mit einem orthonormierten Achsensystem darstellen. Konventionell liegt die reelle Achse horizontal und zeigt nach rechts, die imaginäre Achse zeigt senkrecht nach oben. Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch einen Vektor zum Punkt mit Koordinaten x und y dargestellt.

C.1.3 Darstellung mit Amplitude und Phase

Der Vektor zum Punkt z der komplexen Zahlenebene hat die Länge $|z|$ (die sog. *Amplitude* von z) und schließt mit der reellen Achse den (*Phasen-*)Winkel ϕ ein (der Winkel wird im mathematisch positiven Sinn gemessen). Der Vektor hat deshalb die beiden Komponenten

$$\begin{aligned} x &= |z|\cos\phi \quad \text{und} \\ y &= |z|\sin\phi\,. \end{aligned}$$

Eine alternative Darstellung ist

$$z = |z|\,e^{i\phi}\,.$$

unter Verwendung einer Exponentialfunktion mit komplexem Argument. Dieser Ausdruck bedeutet: man nimmt einen Vektor der Länge $|z|$ und dreht ihn um den Winkel ϕ im Gegenuhrzeigersinn (d.h. im mathematisch positiven Sinn) gegen die reelle Achse.

Die letzten drei Gleichungen implizieren, daß

$$|z|\,e^{i\phi} = x + i\,y = |z|\cos\phi + i\,|z|\sin\phi$$

sowie

$$|z|^2 = (x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad \tan\phi = y/x$$

und

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\sin\phi\,.$$

C.1.4 Der Operator i

Der Operator i identifiziert den Imaginärteil einer komplexen Zahl. Er bedeutet eine Drehung um 90° ($\pi/2$) im mathematisch positiven Sinn gegen die reelle Achse, für die der Phasenwinkel $\phi = 0$ ist. Diese Drehung um 90° bringt uns von der reellen zur imaginären Achse.

Merkregel: i meint *senkrecht* (zur reellen Achse).

Zweimalige Anwendung des Operators $i(iy) = i^2y = -y$ bedeutet eine zweimalige Drehung um 90°, also insgesamt eine Drehung um 180° (oder π) und daher

$$i^2 = -1\,,$$

was mit der ursprünglichen Definition $i = \sqrt{-1}$ konsistent ist. Entsprechend ist $i^3 = -i$ (Drehung um $-90°$) und $i^4 = 1$ (Drehung um 0 mod(2π)).

C.1.5 Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen folgt sofort aus den obigen Definitionen

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$$

Sie erfolgt komponentenweise und enthält als Sonderfall auch die Addition und Subtraktion reeller Zahlen. Die Multiplikation und die Division von komplexen Zahlen erfolgt am einfachsten in der Exponentialdarstellung

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)} \\ z_1 \,/\, z_2 &= |z_1|e^{i\phi_1} \,/\, |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1| \,/\, |z_2|e^{i(\phi_1-\phi_2)} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist ein Vektor der Länge $|z_1||z_2|$ (bzw. $|z_1|/|z_2|$) unter dem Winkel $\phi_1+\phi_2$ (bzw. $\phi_1 - \phi_2$).

C.1.6 Konjugiert komplexe Zahl

Die zu z *konjugiert komplexe* Zahl z^* erhält man nach der Vorschrift

$$z = x + iy \quad \longrightarrow \quad z^* = x - iy\,.$$

Geometrisch bedeutet das eine Spiegelung des Vektors z an der reellen Achse. Das Produkt einer Zahl z mit ihrer konjugiert komplexen Zahl z^*

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \\ &= |z|e^{i\phi} \cdot |z|e^{-i\phi} = |z|^2(e^{i\phi} \cdot e^{-i\phi}) = |z|^2 \end{aligned}$$

gibt das Quadrat der Länge des Vektors zum Punkt z der komplexen Zahlenebene (das gilt auch für reelle Zahlen, für die $z^* = z$).

Das Quadrat der Amplitude $|z|^2$ einer komplexen Zahl z erhält man
durch Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl z^*.

Die Phase einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ergibt sich als
Quotient von Imaginär- und Realteil $\phi = \arctan(y/x)$.

Die Phase der zu $z = |z|\exp[i\phi]$ konjugiert komplexen Zahl z^* ist (per Definition) $-\phi$.

C.1.7 Sinus, Cosinus und komplexe Exponentialfunktion

Zwischen der Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten und der Sinus- bzw. Cosinusfunktion gibt es folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} e^{+i\phi} &= \cos\phi + i\sin\phi \\ e^{-i\phi} &= \cos\phi - i\sin\phi \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{1}{2}\left(e^{+i\phi} + e^{-i\phi}\right) \\ \sin\phi &= \frac{1}{2i}\left(e^{+i\phi} - e^{-i\phi}\right) \end{aligned}$$